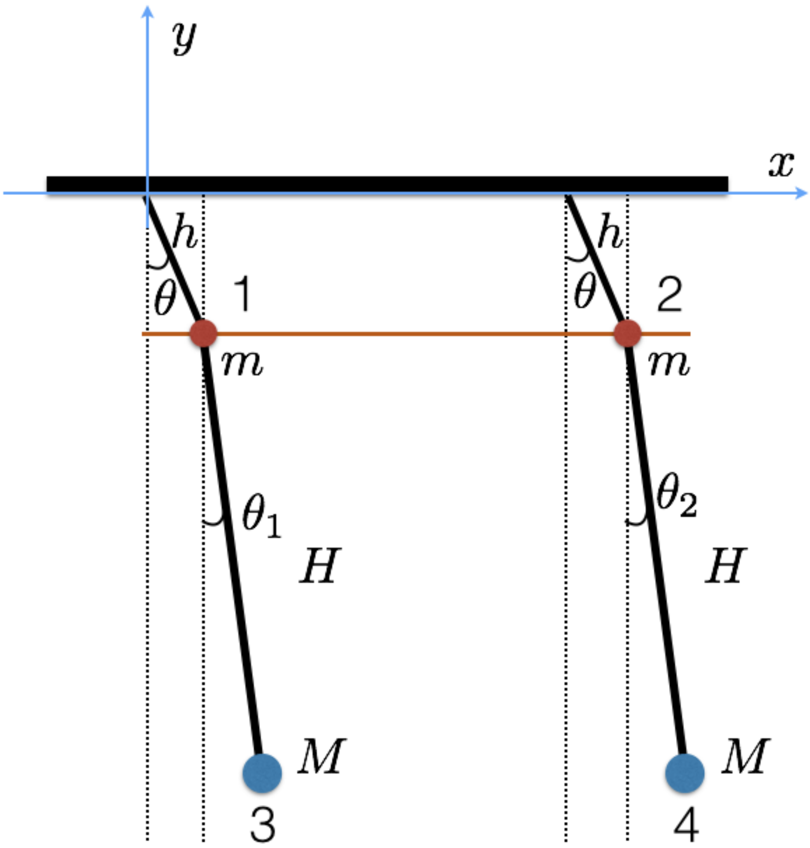
Determinação da dependência de Δ com x_1 e x_2 para o caso de dois pêndulos acoplados por uma barra rígida

Vitor R. Coluci
Faculdade de Tecnologia – UNICAMP

Alexandre F. da Fonseca
Instituto de Física Gleb Wataghin – UNICAMP

(Dated: October 7, 2021)

Dois pêndulos simples de massa M estão conectados por uma barra rígida de massa $2m$ que se mantém sempre na horizontal. Os pêndulos são presos nos pontos 1 e 2. A distância entre os pontos 1 e 2 é D. Modelaremos o problema como sendo composto por 4 corpos: 1, 2, 3 e 4 conforme o desenho a seguir.



Para uma dada configuração do sistema, as posições dos corpos são dadas por ($h \equiv L - H$):

$$x_1 = h \sin\theta$$

$$y_1 = -h\cos\theta$$

$$x_2 = x_1 + D = h\sin\theta + D$$

$$y_2 = -h\cos\theta$$

$$x_3 = h\sin\theta + H\sin\theta_1$$

$$y_3 = -h\cos\theta - H\cos\theta_1$$

$$x_4 = h\sin\theta + H\sin\theta_2 + D$$

$$y_4 = -h\cos\theta - H\cos\theta_2$$

$$\dot{x_1} = h\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\dot{y_1} = h\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\dot{x_2} = x_1 + D = h\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\dot{y_2} = h\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\dot{x_3} = h\dot{\theta}\cos\theta + H\dot{\theta}_1\cos\theta_1$$

$$\dot{y_3} = h\dot{\theta}\sin\theta + H\dot{\theta}_1\sin\theta_1$$

$$\dot{x_4} = h\dot{\theta}\cos\theta + H\dot{\theta}_2\cos\theta_2$$

$$\dot{y_4} = h\dot{\theta}\sin\theta + H\dot{\theta}_2\sin\theta_2$$

A energia cinética do sistema é dada por:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m[\dot{x_1}^2 + \dot{y_1}^2] + \frac{1}{2}m[\dot{x_2}^2 + \dot{y_2}^2] + \frac{1}{2}M[\dot{x_3}^2 + \dot{y_3}^2 + \dot{x_4}^2 + \dot{y_4}^2] \qquad (1) \\
&= mh^2\dot{\theta}^2 + \\
&+ \frac{1}{2}M[(h\dot{\theta}\cos\theta + H\dot{\theta}_1\cos\theta_1)^2 + (h\dot{\theta}\sin\theta + H\dot{\theta}_1\sin\theta_1)^2 \\
&+ (h\dot{\theta}\cos\theta + H\dot{\theta}_2\cos\theta_2)^2 + (h\dot{\theta}\sin\theta + H\dot{\theta}_2\sin\theta_2)^2] \\
&= mh^2\dot{\theta}^2 + \\
&+ \frac{1}{2}M[h^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2hH\dot{\theta}\dot{\theta}_1\cos\theta\cos\theta_1 + H^2\dot{\theta_1}^2\cos^2\theta_1 + \\
&+ h^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + 2hH\dot{\theta}\dot{\theta}_1\sin\theta\sin\theta_1 + H^2\dot{\theta_1}^2\sin^2\theta_1 \\
&+ h^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2hH\dot{\theta}\dot{\theta}_2\cos\theta\cos\theta_2 + H^2\dot{\theta_2}^2\cos^2\theta_2 + \\
&+ h^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + 2hH\dot{\theta}\dot{\theta}_2\sin\theta\sin\theta_2 + H^2\dot{\theta_2}^2\sin^2\theta_2] \\
&= mh^2\dot{\theta}^2 + \\
&+ \frac{1}{2}M[2h^2\dot{\theta}^2 + H^2\dot{\theta_1}^2 + H^2\dot{\theta_2}^2 + \\
&+ 2hH\dot{\theta}\dot{\theta}_1\cos(\theta - \theta_1) + 2hH\dot{\theta}\dot{\theta}_2\cos(\theta - \theta_2)] \\
T &= mh^2\dot{\theta}^2 + M[h^2\dot{\theta}^2 + \frac{H^2}{2}(\dot{\theta_1}^2 + \dot{\theta_2}^2) + hH\dot{\theta}\dot{\theta}_1\cos(\theta - \theta_1) + hH\dot{\theta}\dot{\theta}_2\cos(\theta - \theta_2)] \qquad (2)
\end{aligned}$$

A energia potencial é dada por:

$$\begin{aligned}
U &= mgy_1 + mgy_2 + Mgy_3 + Mgy_4 \\
&= -mgh\cos\theta - mgh\cos\theta - Mg(h\cos\theta + H\cos\theta_1) - Mg(h\cos\theta + H\cos\theta_2) \\
&= -2(m+M)gh\cos\theta - MgH(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \qquad (3)
\end{aligned}$$

A Lagrangiana $L = T - U$ para o sistema será :

$$\begin{aligned}
L &= (m+M)h^2\dot{\theta}^2 + M[\frac{H^2}{2}(\dot{\theta_1}^2 + \dot{\theta_2}^2) + hH\dot{\theta}\dot{\theta}_1\cos(\theta-\theta_1) + hH\dot{\theta}\dot{\theta}_2\cos(\theta-\theta_2)] \\
&+ 2(m+M)gh\cos\theta + MgH(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \qquad (4)
\end{aligned}$$

A partir de L obteremos as equações de movimento para os corpos do sistema. Primeiramente para os corpos 1 e 2, que se comportam como se fosse um só. A equação de movimento para eles está relacionada ao ângulo θ.

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -MHh\dot{\theta}\dot{\theta}_1\sin(\theta-\theta_1) - MHh\dot{\theta}\dot{\theta}_2\sin(\theta-\theta_2) - 2(m+M)gh\sin\theta \qquad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2(m+M)h^2\dot{\theta} + MhH\dot{\theta}_1\cos(\theta-\theta_1) + MhH\dot{\theta}_2\cos(\theta-\theta_2) \qquad (6)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) &= 2(m+M)h^2\ddot{\theta} + \\
&+ MhH\ddot{\theta}_1\cos(\theta-\theta_1) - MhH\dot{\theta}\dot{\theta}_1\sin(\theta-\theta_1) + MhH\dot{\theta_1}^2\sin(\theta-\theta_1) \\
&+ MhH\ddot{\theta}_2\cos(\theta-\theta_2) - MhH\dot{\theta}\dot{\theta}_2\sin(\theta-\theta_2) + MhH\dot{\theta_2}^2\sin(\theta-\theta_2) \qquad (7) \\
& \qquad (8)
\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) \qquad (9) \\
-2(m+M)gh\sin\theta &= 2(m+M)h^2\ddot{\theta} + MhH\ddot{\theta}_1\cos(\theta-\theta_1) + MhH\dot{\theta_1}^2\sin(\theta-\theta_1) \\
&+ MhH\ddot{\theta}_2\cos(\theta-\theta_2) + MhH\dot{\theta_2}^2\sin(\theta-\theta_2) \\
& \qquad (10)
\end{aligned}$$

que resulta em

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{h}\sin\theta + \frac{MH}{2(m+M)h}[\ddot{\theta_1}\cos(\theta-\theta_1) + \ddot{\theta_2}\cos(\theta-\theta_2) + \dot{\theta_1}^2\sin(\theta-\theta_1) + \dot{\theta_2}^2\sin(\theta-\theta_2)] = 0 \tag{11}$$

Para o corpo 3, relacionada ao ângulo θ_1, temos

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = MHh\dot{\theta}\dot{\theta}_1\sin(\theta-\theta_1) - MgH\sin\theta_1 \tag{12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta_1}} = MH^2\dot{\theta}_1 + MhH\dot{\theta}\cos(\theta-\theta_1) \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta_1}}\right) &= MH^2\ddot{\theta_1} + \\ &+ MhH\ddot{\theta}\cos(\theta-\theta_1) + MhH\dot{\theta}\dot{\theta}_1\sin(\theta-\theta_1) - MhH\dot{\theta}^2\sin(\theta-\theta_1)\end{aligned} \tag{14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta_1}}\right) \tag{15}$$

$$-MgH\sin\theta_1 = MH^2\ddot{\theta_1} + MhH[\ddot{\theta}\cos(\theta-\theta_1) - \dot{\theta}^2\sin(\theta-\theta_1)] \tag{16}$$

o que resulta em

$$\ddot{\theta_1} + \frac{g}{H}\sin\theta_1 + \frac{h}{H}[\ddot{\theta}\cos(\theta-\theta_1) - \dot{\theta}^2\sin(\theta-\theta_1)] = 0 \tag{17}$$

Finalmente, para o corpo 4, relacionada ao ângulo θ_2, temos

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = MHh\dot{\theta}\dot{\theta}_2\sin(\theta-\theta_2) - MgH\sin\theta_2 \tag{18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta_2}} = MH^2\dot{\theta}_2 + MhH\dot{\theta}\cos(\theta-\theta_2) \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) &= MH^2\ddot{\theta}_2 + \\ &+ MhH\ddot{\theta}\cos(\theta-\theta_2) + MhH\dot{\theta}\dot{\theta}_2\sin(\theta-\theta_1) - MhH\dot{\theta}^2\sin(\theta-\theta_2)\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) \\ -MgH\sin\theta_2 &= MH^2\ddot{\theta}_2 + MhH[\ddot{\theta}\cos(\theta-\theta_2) - \dot{\theta}^2\sin(\theta-\theta_2)]\end{aligned} \tag{21}$$

o que resulta em

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{H}\sin\theta_2 + \frac{h}{H}[\ddot{\theta}\cos(\theta-\theta_2) - \dot{\theta}^2\sin(\theta-\theta_2)] = 0 \tag{22}$$

Portanto, as equações do sistema que vão descrever o movimento dos corpos do sistema são:

$$\begin{cases}\ddot{\theta} + \frac{g}{h}\sin\theta + \frac{MH}{2(m+M)h}[\ddot{\theta}_1\cos(\theta-\theta_1) + \ddot{\theta}_2\cos(\theta-\theta_2) + \dot{\theta}_1^2\sin(\theta-\theta_1) + \dot{\theta}_2^2\sin(\theta-\theta_2)] = 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{H}\sin\theta_1 + \frac{h}{H}[\ddot{\theta}\cos(\theta-\theta_1) - \dot{\theta}^2\sin(\theta-\theta_1)] = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{H}\sin\theta_2 + \frac{h}{H}[\ddot{\theta}\cos(\theta-\theta_2) - \dot{\theta}^2\sin(\theta-\theta_2)] = 0\end{cases} \tag{23}$$

Considerando a aproximação para ângulos pequenos, ou seja, $\theta_1 \simeq \theta_2 \simeq \theta$, $\theta_1 \ll 1$, $\theta_2 \ll 1$, $\theta \ll 1$ teremos que $\sin\theta \simeq \theta$, $\sin\theta_1 \simeq \theta_1$, $\sin\theta_2 \simeq \theta_2$, $\sin(\theta-\theta_{1,2}) \simeq 0$, $\cos(\theta-\theta_{1,2}) \simeq 1$. Assim, as equações (23) são simplificadas para

$$\begin{cases}\ddot{\theta} + \frac{g}{h}\theta + \frac{MH}{2(m+M)h}[\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2] = 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{H}\theta_1 + \frac{h}{H}\ddot{\theta} = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{H}\theta_2 + \frac{h}{H}\ddot{\theta} = 0\end{cases} \tag{24}$$

Se ainda supormos que a massa da barra é muito menor que a massa dos pêndulos ($m \ll M$) teremos $\dfrac{M}{m+M} = \dfrac{1}{1+m/M} \simeq 1$ e assim

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \frac{g}{h}\theta + \frac{H}{2h}[\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2] = 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{H}\theta_1 + \frac{h}{H}\ddot{\theta} = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{H}\theta_2 + \frac{h}{H}\ddot{\theta} = 0 \end{cases} \tag{25}$$

Substituindo a primeira equação de (25) na segunda e terceira, teremos as equações associadas ao movimento dos pêndulos simples acoplados:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{H}\theta_1 - \frac{g}{H}\alpha(\theta, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2) = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{H}\theta_2 - \frac{g}{H}\alpha(\theta, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2) = 0 \end{cases} \tag{26}$$

onde definimos $\alpha(\theta, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2) \equiv \theta + \frac{H}{2g}[\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2]$

Agora iremos fazer algumas manipulações algébricas para escrever α em termos de θ_1 e θ_2. Usando as expressões para $\ddot{\theta}_1$ e $\ddot{\theta}_2$ da Eq. (25), podemos reescrever α como

$$\alpha = \theta + \frac{H}{2g}[\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2] = \theta + \frac{H}{2g}[-\frac{g}{H}\theta_1 + \frac{g}{H}\alpha - \frac{g}{H}\theta_2 + \frac{g}{H}\alpha].$$

Simplificando, chegamos à

$$\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2}{2}$$

Substituindo na primeira equação de (25)

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{h}\theta + \frac{H}{2h}[\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2] = 0,$$

temos

$$\frac{\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2}{2} + \frac{g}{h}\theta + \frac{H}{2h}[\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2] = 0$$

de onde obtemos

$$\frac{H}{2g}[\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2] = -\frac{H}{H+h}\theta.$$

Assim,

$$\alpha = \frac{h}{H+h}\theta = \frac{h}{2(H+h)}(\theta_1 + \theta_2). \tag{27}$$

Subtraindo-se as equações de (26), teremos o primeiro modo normal:

$$(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + \frac{g}{H}(\theta_1 - \theta_2) = 0 \tag{28}$$

Somando-se as equações de (26), teremos o segundo modo normal:

$$(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \frac{g}{H}(\theta_1 + \theta_2 - 2\alpha) = 0 \tag{29}$$

$$(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \frac{g}{H}(\theta_1 + \theta_2 - \frac{h}{(H+h)}(\theta_1 + \theta_2)) = 0 \tag{30}$$

$$(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \frac{g}{H+h}(\theta_1 + \theta_2) = 0 \tag{31}$$

Com a aproximação de ângulos pequenos, temos que $\theta_1 \simeq x_1/(H+h)$ e $\theta_2 \simeq x_2/(H+h)$, assim, usando a Eq. (27), as equações (26) tomam a forma de

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{g}{H}[x_1 - \frac{h}{2(H+h)}(x_1 + x_2)] \\ \ddot{x}_2 = -\frac{g}{H}[x_2 - \frac{h}{2(H+h)}(x_1 + x_2)] \end{cases} \tag{32}$$

Portanto, $\Delta(x_1, x_2) = \frac{h}{2(H+h)}(x_1 + x_2)$.