O Problema da Velocidade Instantânea: Mecânica e Cálculo

CET-1550 – Física Moderna – 2024S2
Prof. Dr. Diego S. Rodrigues, FT-UNICAMP
https://wordpress.ft.unicamp.br/diegorodrigues
diego.rodrigues@ft.unicamp.br

O Cálculo requeria continuidade, e a continuidade supostamente requeria o infinitamente pequeno, mas ninguém sabia o que o infinitamente pequeno poderia ser. Bertrand Russel

O surgimento do Cálculo Diferencial e Integral está intimamente relacionado ao desenvolvimento da Física (Mecânica) a partir de ideias estabelecidas por *Sir* Isaac Newton* (1642-1727) no século XVII. Em boa parte, o Cálculo e a Mecânica se desenvolveram de forma integrada, cada um motivando e esclarecendo a formação do outro. O surgimento da noção de derivada como taxa de variação instantânea exemplifica claramente esse fato. Mas, afinal, o que é uma *derivada*?

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que à cada $t \in D$ associa o valor $f(t)$. O limite definido por

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{1}$$

se existir, é chamado de derivada de f e é comumente denotada por f' (lê-se "f linha"). Assim sendo, a derivada de $f(t)$ é a função dada por

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \tag{2}$$

cuja definição formal é atribuída ao matemático Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

Em se tratando da Física, especialmente da Mecânica, a introdução da noção de derivada permitiu o desenvolvimento de uma definição operacional de cálculo de taxas de variação "instantâneas". De fato, se $f(t)$ representa a posição (unidimensional) de um móvel no instante t, então $f'(t)$ representa a velocidade (unidimensional) desse móvel no instante t. Mas, por quê?

Se $f(t)$ representa a posição de um móvel no tempo t, então a *razão incremental*

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{3}$$

é a velocidade média do móvel após transcorrido um tempo Δt, isto é, a velocidade média do móvel entre os instantes de tempo $t + \Delta t$ e t, pois trata-se da variação da posição no intervalo de tempo considerado. Entretanto, se desejamos calcular a *velocidade instantânea* de um móvel, então $\Delta t = 0$ e portanto não podemos utilizar a regra acima (ao menos não diretamente, porque senão o denominador seria zero). No entanto, assim como fez Isaac Newton, não pensemos em (3) pondo $\Delta t = 0$. Em vez disso, entendamos "$\Delta t = 0$" como um limite, e pensemos na fração (3) considerando que Δt *não é zero*, mas *tende a zero*.

O fato de a ideia anterior se referir a uma velocidade instantânea pode causar estranheza, pois a noção de velocidade geralmente se refere a uma distância percorrida em um certo intervalo de tempo *não-nulo*. Para esclarecer isso, vejamos um problema de cálculo de velocidade instantânea.

*Juntamente com Gottfried Leibniz (1646-1716), Isaac Newton é considerado o criador do Cálculo.

Considere um carro que se move ao longo de uma rodovia de modo que sua posição no tempo t *seja dada por* $s(t) = t^3$, *com* t *em segundos e* $s(t)$ *em metros. Assim sendo, qual a velocidade instantânea do carro exatamente em* $t = 2$ *segundos?*

Para responder essa pergunta, considere primeiramente a ideia de velocidade média do móvel (v_m) entre os instantes $t = 2$ e $t = 2 + \Delta t$, a saber†:

$$v_m = \frac{s(2+\Delta t) - s(2)}{\Delta t} = \frac{(2+\Delta t)^3 - 2^3}{\Delta t} = \frac{\cancel{2^3} + 3 \cdot 2^2 \cdot \Delta t + 3 \cdot 2 \cdot (\Delta t)^2 + (\Delta t)^3 - \cancel{2^3}}{\Delta t},$$

e, assim,

$$v_m = \frac{12\,\Delta t + 6\,(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3}{\Delta t}. \qquad (4)$$

Note que v_m dado pela equação acima não está definido para $\Delta t = 0$. Portanto, $\Delta t \neq 0$ na equação (4) e, assim, pondo Δt em evidência,

$$v_m = \cancel{\Delta t}\, \frac{12 + 6\,(\Delta t) + (\Delta t)^2}{\cancel{\Delta t}}, \qquad (5)$$

de modo que, se $\Delta t \neq 0$,

$$v_m = 12 + 6\,(\Delta t) + (\Delta t)^2. \qquad (6)$$

Assim sendo, à medida que o intervalo Δt é considerando como sendo um número positivo, porém cada vez mais próximo de zero, o valor da velocidade instantânea em $t = 2$ é igual a ______ metros por segundo (complete a Tabela 1).

Tabela 1: Valor da velocidade média em $t = 2$ segundos, dada pela equação (6).

Δt	1	0,1	0,01	0,001	“0”
v_m					

Assim, de acordo com as ideias anteriores, o valor da velocidade instantânea em $t = 2$, denotado por $v(2)$, é igual ao limite da velocidade média em $t = 2$, $v_m(2)$, quando $\Delta t \to 0$.

De fato, a mesma ideia pode ser aplicada para se calcular a velocidade instantânea do móvel em *qualquer* instante de tempo, pondo:

$$v(t) \doteq s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \qquad (7)$$

Para o exemplo dado, a velocidade instantânea do móvel em um tempo t (qualquer) é:

$$\begin{aligned} v(t) \doteq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t+\Delta t)^3 - t^3}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3\,t^2\,\Delta t + 3\,t\,(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} 3\,t^2 + 3\,t\,\Delta t + (\Delta t)^2 \\ &= 3\,t^2. \end{aligned} \qquad (8)$$

Por fim, vale salientar que a “Regra de Newton” também pode ser “invertida”, de modo a calcular não a velocidade a partir da posição, mas a distância a partir velocidade. Isso, porém, será abordado somente mais adiante, quando adentrarmos no Cálculo Integral.

Conteúdo relacionado: “O Paradoxo da Derivada”, Canal *3Blue1Brown* do YouTube.

† Cubo da soma: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, o qual pode ser calculado através do triângulo de Pascal.